

На правах рукописи



Нгуен Ши Тоан

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПОВЕДЕНИЯ  
УПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Специальность 1.1.8. Механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Тула 2022

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Тульский государственный университет».

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук,  
доцент **Христич Дмитрий Викторович**

**Официальные оппоненты:** **Пеньков Виктор Борисович**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор, профессор кафедры общей  
механики ФГБОУ ВО «Липецкий  
государственный технический университет»

**Астапов Юрий Владимирович**,  
кандидат физико-математических наук,  
инженер-математик ООО «Модем-Техно»,  
г. Тула

**Ведущая организация:** Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего  
образования «Тверской государственный  
университет»

Защита состоится «28» июня 2022 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета 99.2.059.02, созданного на базе ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет», ФГБОУ ВО «Воронежский государственный университет», по адресу: 300012, г. Тула, пр. Ленина, 92 (12-105).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет»: [https://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02/Nguen\\_Shi\\_Toan/](https://tsu.tula.ru/science/dissertation/diss-999-191-02/Nguen_Shi_Toan/)

Автореферат разослан «10» мая 2022 г.

Ученый секретарь  
диссертационного  
совета



Глаголев Вадим Вадимович

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы исследования и степень её разработанности.** В машиностроении, строительстве и других отраслях широко применяются композиционные материалы. Активно проводятся исследования по созданию новых материалов, обладающих заданными физико-механическими свойствами. Многие современные композиционные материалы проявляют нелинейность упругих свойств уже при малых деформациях. К нелинейным упругим свойствам относятся как криволинейный вид диаграммы деформирования, так и разносопротивляемость растяжению и сжатию. Такие материалы являются также анизотропными в отношении упругих свойств и, в основном, относятся к классу ортотропных. Классическая линейная модель анизотропного тела в форме закона Гука не всегда адекватно описывает зависимости между напряжениями и деформациями, полученные в экспериментах. В связи с этим в настоящее время сохраняется необходимость построения новых математических моделей, адекватно описывающих нелинейно упругое поведение анизотропных материалов.

Эксперименты с изотропными и анизотропными телами показывают, что реакции многих материалов на растяжение и сжатие значительно различаются. Для описания и математического моделирования такого поведения во второй половине XX века была предложена разномодульная теория упругости. Основания этой теории для изотропного материала были заложены в работах С.А. Амбарцумяна и А.А. Хачатряна, Л.А. Толоконникова, Н.М. Матченко, Г.В. Бригадирова, Е.В. Ломакина, Ю.Н. Работнова, Г.С. Шапиро. Различные варианты определяющих уравнений для разносопротивляющихся изотропных материалов предложены в работах А.А. Буренина и В.М. Ярушиной, А.А. Золочевского, В.П. Мясникова и А.А. Олейникова, И.Ю. Цвелодуба.

Многие конструкционные материалы наряду с разносопротивляемостью растяжению и сжатию обладают анизотропией упругих свойств. Распространённым частным случаем анизотропных разносопротивляющихся материалов являются ортотропные материалы, примером которых служат, в первую очередь, композиционные материалы. Модели ортотропного материала, описывающие разносопротивляемость, построены в работах V.J. Papazoglou и N.G. Tsouvalis, B.P. Patel, K. Khan и Y. Nath, C.W. Bert, J.N. Reddy с соавторами.

Более сложные модели упругих ортотропных материалов, учитывающие разносопротивляемость растяжению и сжатию и нелинейную связь напряжений и деформаций, предложены в работах Н.М. Матченко, А.А. Трещёва, Е.В. Ломакина и Б.Н. Федулова, R.M. Jones, H.S. Morgan, D.A.R. Nelson, H.T. Hahn и S.W. Tsai. Краевые задачи нелинейной теории упругости для анизотропных тел решены в работах В.Б. Пенькова с соавторами. Построению нелинейных моделей ортотропного материала посвящены также работы J. Leliec и J. Majak, C. Lüders, E.P. Saliklis, T.J. Urbanik и B. Tokuyay, D.W. Schmueser, F. Tabaddor, A. Tabiei и J. Wu, W.-j. Yao, C.-h. Zhang и X.-f. Jiang, B.

Yang, Z. Yu, Q. Zhang, Y. Shang и Y. Yan. В ряде работ числовые значения параметров предложенных нелинейных моделей ортотропного материала определены по данным экспериментов.

В связи с тем, что многие известные модели ортотропных тел не полностью учитывают нелинейность зависимостей между напряжениями и деформациями, актуальной является разработка моделей нелинейно упругих ортотропных тел.

**Целью работы** является построение соотношений, определяющих нелинейное упругое поведение ортотропных материалов, и экспериментальная идентификация материальных параметров.

**Основными задачами работы** являются:

- 1) конкретизация вида нелинейных определяющих соотношений для ортотропного материала;
- 2) разработка программы механических экспериментов с макрообразцами, достаточных для идентификации построенных моделей;
- 3) определение значений констант моделей по результатам экспериментов, известным из литературы.

**Научная новизна работы** заключается в следующем:

- 1) в рамках предельной формы обобщения частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы получены нелинейные определяющие соотношения второго и третьего порядков для ортотропного упругого материала;
- 2) показано, что в отличие от линейной модели ортотропного материала, содержащей 9 материальных констант в определяющих соотношениях, модель второго порядка имеет 18, а третьего порядка – 27 параметров.
- 3) проведена идентификация параметров построенных моделей первого, второго и третьего порядков по данным экспериментов по одноосному растяжению, сжатию и сдвигу плоских образцов;
- 4) предложенные модели в отличие от известных моделей описывают нелинейное поведение ортотропных материалов как при чистом сдвиге, так и при одноосном растяжении и сжатии.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Предложенные в работе варианты соотношений, определяющих связь между напряжениями и деформациями, могут быть использованы для моделирования упругого поведения ортотропных тел при различных внешних механических воздействиях.

Разработанная программа экспериментов по идентификации параметров нелинейных моделей может применяться в лабораториях, выполняющих механические испытания новых материалов. Построенные нелинейные модели упругого поведения ортотропных тел могут использоваться при проведении прочностных расчётов изделий из анизотропных материалов.

**Методология и методы исследования.** Сформулированные задачи решаются на основе методов нелинейной теории упругости, включающих подходы к построению определяющих соотношений для анизотропных тел,

известные из работ Ю.Н. Работнова, Л.И. Седова, К.Ф. Черных, В. Новацкого, А.А. Маркина и М.Ю. Соколовой. Анализ предложенных моделей выполняется методами линейной алгебры и математического анализа. Задача определения параметров модели по имеющимся результатам экспериментов решается на основе известных методов оптимизации и статистических методов обработки данных.

**Положения, выносимые на защиту:**

1) формы определяющих соотношений второго и третьего порядков для упругого ортотропного материала в рамках предельной формы обобщения частного постулата А.А. Ильюшина;

2) программа экспериментов, предназначенных для идентификации параметров предложенных определяющих соотношений.

**Достоверность полученных результатов** подтверждается соответствием расчётов напряжённо-деформированного состояния образцов с известными результатами экспериментов и качественным совпадением результатов решения задач теории упругости в частных случаях с известными результатами других авторов.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты работы доложены на научном семинаре по механике деформируемого твердого тела им. Л.А. Толоконникова (научный руководитель – профессор А.А. Маркин, г. Тула, 2022 г.), на Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики» (г. Воронеж, 2019, 2021 гг.).

**Личный вклад автора.** Представленные в диссертации результаты исследований получены лично автором под руководством научного руководителя. В публикациях, выполненных в соавторстве, соискателю принадлежат результаты построения конкретных определяющих соотношений, исследования взаимосвязей между параметрами построенных моделей, идентификации значений констант моделей по данным экспериментов. Лично автором получены следующие результаты:

– проведён теоретический анализ существующих нелинейных определяющих соотношений для ортотропного материала;

– на основе задания упругого потенциала деформаций для ортотропного материала построены нелинейные определяющие соотношения в форме зависимостей инвариантов тензора деформаций от инвариантов тензора напряжений и в форме зависимостей между компонентами тензоров;

– предложены программы экспериментов с плоскими образцами, по результатам которых можно определить значения всех параметров нелинейных моделей;

– по известным данным экспериментов с композиционными материалами определены значения параметров моделей первого, второго и третьего порядков;

– выполнено сравнение разработанных моделей между собой и с нелинейными моделями других авторов.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 6 работ, из них 2 работы в рецензируемых изданиях и сборниках, входящих в перечень ВАК, 1 работа в изданиях, индексируемых в Web of Science и Scopus.

**Структура и объём диссертации.** Работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованных источников. Объём диссертации – 118 страниц. Работа содержит 23 рисунка, 2 таблицы и список использованных источников из 88 наименований.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы работы, сформулированы цель и задачи работы, приведён обзор литературы по рассматриваемой проблеме, изложено краткое содержание и основные результаты работы.

В **первой главе** приведены основные положения кинематики деформаций твёрдого тела. Для описания деформаций в предположении об их малости используется линеаризованный тензор деформаций Коши–Грина

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \overset{\circ}{\nabla} \vec{u} + \vec{u} \overset{\circ}{\nabla} \right), \text{ где } \overset{\circ}{\nabla} - \text{оператор Гамильтона (набла-оператор) в отсчётной}$$

системе координат,  $\vec{u}$  – вектор перемещений точек деформируемого тела. Для описания внутренних напряжений используется тензор истинных напряжений Коши  $\mathbf{S}$ .

В линейно-упругих материалах при постоянной температуре тензор деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon}$  и тензор напряжений  $\mathbf{S}$  связаны законом Гука, который может быть записан в двух формах:  $\mathbf{S} = \mathbf{N} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{S}$ , где  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{C}$  – постоянные тензоры упругости и упругих податливостей четвёртого ранга, имеющие в общем случае 21 независимую компоненту. Если линейно-упругий анизотропный материал обладает симметрией свойств, то для него можно указать группу ортогональных преобразований  $g_A$ , для всех элементов  $\mathbf{Q}_A$  которой выполняется условие  $\mathbf{Q}_A^{-1} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}_A = \mathbf{N} \cdot (\mathbf{Q}_A^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{Q}_A) \quad \forall \mathbf{Q}_A \in g_A$ . Группа преобразований  $g_A$  называется группой симметрии данного материала. Тело, обладающее тремя взаимно ортогональными плоскостями упругой симметрии в каждой точке, называется ортотропным. Направления, перпендикулярные плоскостям упругой симметрии, называют главными направлениями анизотропии ортотропного тела или главными осями ортотропии. Для ортотропного материала порождающими элементами группы симметрии являются ортогональные тензоры поворота  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{R}_1^\pi = \vec{a}_1 \vec{a}_1 - \vec{a}_2 \vec{a}_2 - \vec{a}_3 \vec{a}_3$ ,  $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{R}_2^\pi = -\vec{a}_1 \vec{a}_1 + \vec{a}_2 \vec{a}_2 - \vec{a}_3 \vec{a}_3$  вокруг главных осей анизотропии  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ . Базисные векторы  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$  направляются вдоль осей симметрии материала. В ортотропном материале эти оси совпадают с прямыми, по которым пересекаются его плоскости симметрии. Ортотропный материал в главных осях анизотропии в рамках обобщённого закона Гука имеет 9 независимых упругих параметров.

Наряду с тремя алгебраическими инвариантами тензоров деформаций и напряжений, которые остаются неизменными при любых ортогональных преобразованиях координат, в теории анизотропной упругости рассматриваются линейные и квадратичные инварианты тензоров, сохраняющие свои значения при любом ортогональном преобразовании  $\mathbf{Q}_A$  из группы симметрии  $\mathcal{G}_A$  данного материала. Ортоотропные материалы имеют три линейных инварианта тензора деформаций

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}), \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\varepsilon_{33} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) \quad (1)$$

и три квадратичных инварианта

$$s_{(1)}^2 = 2\varepsilon_{12}^2, \quad s_{(2)}^2 = 2\varepsilon_{23}^2, \quad s_{(3)}^2 = 2\varepsilon_{31}^2. \quad (2)$$

Инварианты тензора напряжений определяются аналогично:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(S_{11} + S_{22} + S_{33}), \quad \sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2S_{33} - S_{11} - S_{22}), \quad \sigma_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(S_{11} - S_{22}), \quad (3)$$

$$t_{(1)}^2 = 2S_{12}^2, \quad t_{(2)}^2 = 2S_{23}^2, \quad t_{(3)}^2 = 2S_{31}^2. \quad (4)$$

Компоненты тензоров деформаций и напряжений, используемые в выражениях инвариантов (1)–(4), отнесены к базису главных осей анизотропии материала. Линейные и квадратичные инварианты (1)–(4) сохраняют свои значения при любых ортогональных преобразованиях из группы симметрии ортоотропного материала, порождаемой поворотами  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{R}_1^\pi$ ,  $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{R}_2^\pi$ .

Для построения определяющих соотношений, описывающих нелинейные зависимости между напряжениями и деформациями, в работе используется потенциал деформаций. Проведён анализ потенциалов деформаций и следующих из них определяющих соотношений в виде зависимостей деформаций от напряжений, предложенных в работах Н.М. Матченко и А.А. Трещёва, Е.В. Ломакина и Б.Н. Федулова, R.M. Jones, H.S. Morgan, D.A.R. Nelson.

Во **второй главе** рассматриваются изотермические процессы деформирования. В этом случае существует потенциал деформаций  $W$ , связанный с потенциалом Гиббса  $G = G(\mathbf{S}, T)$  соотношением:  $W = -G(\mathbf{S}, T_0)/\rho_0$ . Для дифференциала потенциала  $W$  получено выражение через линейные и квадратичные инварианты деформаций и напряжений в виде:

$$dW = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{S} = \varepsilon_0 d\sigma_0 + \varepsilon_1 d\sigma_1 + \varepsilon_2 d\sigma_2 + s_{(1)} dt_{(1)} + s_{(2)} dt_{(2)} + s_{(3)} dt_{(3)}. \quad (5)$$

В качестве основной гипотезы при записи нелинейных определяющих соотношений для ортоотропного материала используется предельная форма обобщения частного постулата А.А. Ильюшина на случай анизотропных материалов. В соответствии с таким обобщением потенциал деформаций не зависит от третьего инварианта напряжений, и процессы в различных собственных подпространствах тензора линейной упругости анизотропного материала не влияют друг на друга. Одно из представлений для упругого потенциала, удовлетворяющих сформулированным гипотезам, имеет вид

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=0}^2 c^{\alpha\beta} (\sigma_\alpha, \sigma_\beta) \sigma_\alpha \sigma_\beta + \sum_{\gamma=1}^3 D^\gamma (t_{(\gamma)}^2) t_{(\gamma)}^2. \quad (6)$$

Из выражений (5), (6) следует, что линейные и квадратичные инварианты тензора деформаций для ортотропного материала (1), (2) могут быть найдены как производные потенциала деформаций по соответствующим инвариантам тензора напряжений (3), (4):

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\partial W}{\partial \sigma_\alpha}, \quad s_{(\gamma)} = \frac{\partial W}{\partial t_{(\gamma)}}. \quad (7)$$

Используя формулы (7), получим определяющие соотношения в виде

$$\varepsilon_\alpha = \sum_{\beta=0}^2 \left( c^{\alpha\beta} \sigma_\beta + \frac{\partial c^{\alpha\beta}}{\partial \sigma_\alpha} \sigma_\alpha \sigma_\beta \right), \quad s_{(\gamma)} = 2 \left( D^\gamma + \frac{\partial D^\gamma}{\partial t_{(\gamma)}^2} t_{(\gamma)}^2 \right) t_{(\gamma)}. \quad (8)$$

Если считать функции  $c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta)$ ,  $D^\gamma(t_{(\gamma)}^2)$  постоянными:  $c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) = c^{\alpha\beta}$ ,  $D^\gamma(t_{(\gamma)}^2) = D^\gamma$ , то из (8) получим линейную связь между инвариантами напряжений и деформаций, являющуюся представлением закона Гука для ортотропного материала и содержащую 9 независимых констант:

$$\varepsilon_0 = c^{00} \sigma_0 + c^{01} \sigma_1 + c^{02} \sigma_2, \quad \varepsilon_1 = c^{10} \sigma_0 + c^{11} \sigma_1 + c^{12} \sigma_2, \quad \varepsilon_2 = c^{20} \sigma_0 + c^{21} \sigma_1 + c^{22} \sigma_2, \\ s_{(1)} = 2D^1 t_{(1)}, \quad s_{(2)} = 2D^2 t_{(2)}, \quad s_{(3)} = 2D^3 t_{(3)}. \quad (9)$$

Для построения нелинейных определяющих соотношений второго порядка для ортотропного материала заданы функции  $c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) = \bar{c}_0^{\alpha\beta} + \bar{c}_1^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)$  и  $D^\gamma(t_{(\gamma)}^2) = D_0^\gamma + D_1^\gamma t_{(\gamma)}$ , где  $\bar{c}_0^{\alpha\beta}$ ,  $\bar{c}_1^{\alpha\beta}$ ,  $D_0^\gamma$ ,  $D_1^\gamma$  – постоянные в выбранном базисе трёхмерного пространства упругие параметры материала.

Определяющие соотношения в этом случае записываются в виде

$$\varepsilon_0 = (c_0^{00} + 3c_1^{00} \sigma_0) \sigma_0 + (c_0^{01} + 2c_1^{01} \sigma_0 + c_1^{01} \sigma_1) \sigma_1 + (c_0^{02} + 2c_1^{02} \sigma_0 + c_1^{02} \sigma_2) \sigma_2, \\ \varepsilon_1 = (c_0^{01} + 2c_1^{01} \sigma_1 + c_1^{01} \sigma_0) \sigma_0 + (c_0^{11} + 3c_1^{11} \sigma_1) \sigma_1 + (c_0^{12} + 2c_1^{12} \sigma_1 + c_1^{12} \sigma_2) \sigma_2, \quad (10) \\ \varepsilon_2 = (c_0^{02} + 2c_1^{02} \sigma_2 + c_1^{02} \sigma_0) \sigma_0 + (c_0^{12} + 2c_1^{12} \sigma_2 + c_1^{12} \sigma_1) \sigma_1 + (c_0^{22} + 3c_1^{22} \sigma_2) \sigma_2, \\ s_{(1)} = 2 \left( D_0^1 + \frac{3}{2} D_1^1 t_{(1)} \right) t_{(1)}, \quad s_{(2)} = 2 \left( D_0^2 + \frac{3}{2} D_1^2 t_{(2)} \right) t_{(2)}, \quad s_{(3)} = 2 \left( D_0^3 + \frac{3}{2} D_1^3 t_{(3)} \right) t_{(3)},$$

где  $\bar{c}_0^{ij} + \bar{c}_0^{ji} = 2c_0^{ij}$ ,  $\bar{c}_1^{ij} + \bar{c}_1^{ji} = 2c_1^{ij}$ ,  $i, j = 0, 1, 2$ .

Определяющие соотношения (10) являются моделью упругости второго порядка для ортотропного материала и содержат 9 констант второго порядка и 9 констант третьего порядка.

Из выражений (10) с учётом выражений (1)–(4) и условий существования упругого потенциала получены связи между компонентами тензоров деформаций и напряжений:

$$\varepsilon_{11} = A_{1111} S_{11} + A_{1122} S_{22} + A_{1133} S_{33} +$$

$$\begin{aligned}
& +B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + B_{1133}S_{33}^2 + 2B_{2211}S_{11}S_{22} + 2B_{3311}S_{11}S_{33} + B_{1123}S_{22}S_{33}, \\
\varepsilon_{22} & = A_{1122}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33} + \\
& + B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + B_{2233}S_{33}^2 + 2B_{1122}S_{11}S_{22} + B_{1123}S_{11}S_{33} + 2B_{3322}S_{22}S_{33}, \\
\varepsilon_{33} & = A_{1133}S_{11} + A_{2233}S_{22} + A_{3333}S_{33} + \\
& + B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{3333}S_{33}^2 + B_{1123}S_{11}S_{22} + 2B_{1133}S_{11}S_{33} + 2B_{2233}S_{22}S_{33}, \\
\varepsilon_{12} & = 2 \left( D_0^1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 |S_{12}| \right) S_{12}, \quad \varepsilon_{23} = 2 \left( D_0^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^2 |S_{23}| \right) S_{23}, \\
\varepsilon_{31} & = 2 \left( D_0^3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^3 |S_{31}| \right) S_{31}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Для записи определяющих соотношений третьего порядка для ортотропного материала заданы функции  $c^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha, \sigma_\beta) = \bar{c}_0^{\alpha\beta} + \bar{c}_1^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) + \bar{c}_2^{\alpha\beta}(\sigma_\alpha^2 + \sigma_\alpha\sigma_\beta + \sigma_\beta^2)$  и  $D^\gamma(t_{(\gamma)}^2) = D_0^\gamma + D_1^\gamma t_{(\gamma)} + D_2^\gamma t_{(\gamma)}^2$ , где  $\bar{c}_0^{\alpha\beta}$ ,  $\bar{c}_1^{\alpha\beta}$ ,  $\bar{c}_2^{\alpha\beta}$ ,  $D_0^\gamma$ ,  $D_1^\gamma$ ,  $D_2^\gamma$  – постоянные в выбранном базисе трёхмерного пространства упругие параметры материала. Определяющие соотношения записываются в виде

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 & = (c_0^{00} + 3c_1^{00}\sigma_0 + 6c_2^{00}\sigma_0^2)\sigma_0 + \\
& + (c_0^{01} + 2c_1^{01}\sigma_0 + c_1^{01}\sigma_1 + 3c_2^{01}\sigma_0^2 + 2c_2^{01}\sigma_0\sigma_1 + c_2^{01}\sigma_1^2)\sigma_1 + \\
& + (c_0^{02} + 2c_1^{02}\sigma_0 + c_1^{02}\sigma_2 + 3c_2^{02}\sigma_0^2 + 2c_2^{02}\sigma_0\sigma_2 + c_2^{02}\sigma_2^2)\sigma_2, \\
\varepsilon_1 & = (c_0^{01} + 2c_1^{01}\sigma_1 + c_1^{01}\sigma_0 + 3c_2^{01}\sigma_1^2 + 2c_2^{01}\sigma_0\sigma_1 + c_2^{01}\sigma_0^2)\sigma_0 + \\
& + (c_0^{11} + 3c_1^{11}\sigma_1 + 6c_2^{11}\sigma_1^2)\sigma_1 + (c_0^{12} + 2c_1^{12}\sigma_1 + c_1^{12}\sigma_2 + 3c_2^{12}\sigma_1^2 + 2c_2^{12}\sigma_1\sigma_2 + c_2^{12}\sigma_2^2)\sigma_2, \\
\varepsilon_2 & = (c_0^{02} + 2c_1^{02}\sigma_2 + c_1^{02}\sigma_0 + 3c_2^{02}\sigma_2^2 + 2c_2^{02}\sigma_0\sigma_2 + c_2^{02}\sigma_0^2)\sigma_0 + \\
& + (c_0^{12} + 2c_1^{12}\sigma_2 + c_1^{12}\sigma_1 + 3c_2^{12}\sigma_2^2 + 2c_2^{12}\sigma_1\sigma_2 + c_2^{12}\sigma_1^2)\sigma_1 + \\
& + (c_0^{22} + 3c_1^{22}\sigma_2 + 6c_2^{22}\sigma_2^2)\sigma_2, \quad s_{(1)} = 2 \left( D_0^1 + \frac{3}{2} D_1^1 t_{(1)} + 2D_2^1 t_{(1)}^2 \right) t_{(1)}, \\
s_{(2)} & = 2 \left( D_0^2 + \frac{3}{2} D_1^2 t_{(2)} + 2D_2^2 t_{(2)}^2 \right) t_{(2)}, \quad s_{(3)} = 2 \left( D_0^3 + \frac{3}{2} D_1^3 t_{(3)} + 2D_2^3 t_{(3)}^2 \right) t_{(3)}, \\
\text{где } \bar{c}_0^{ij} + \bar{c}_0^{ji} & = 2c_0^{ij}, \quad \bar{c}_1^{ij} + \bar{c}_1^{ji} = 2c_1^{ij}, \quad \bar{c}_2^{ij} + \bar{c}_2^{ji} = 2c_2^{ij}, \quad i, j = 0, 1, 2.
\end{aligned} \tag{12}$$

Определяющие соотношения (12) являются моделью упругости третьего порядка для ортотропного материала и содержат 27 параметров: по 9 констант второго, третьего и четвёртого порядков. Определяющие соотношения (12) по сравнению с квадратичными соотношениями содержат дополнительные слагаемые третьей степени относительно инвариантов тензора напряжений.

При малых деформациях определяющие соотношения (10) и (12) совпадают с линейными соотношениями (9).

Из выражений (12) с учётом выражений (1)–(4) и условий существования упругого потенциала найдены зависимости компонент тензора деформаций от компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= A_{1111}S_{11} + A_{1122}S_{22} + A_{1133}S_{33} + \\
&+ B_{1111}S_{11}^2 + B_{1122}S_{22}^2 + B_{1133}S_{33}^2 + 2B_{2211}S_{11}S_{22} + 2B_{3311}S_{11}S_{33} + B_{1123}S_{22}S_{33} + \\
&+ C_{1111}S_{11}^3 + 3C_{2111}S_{11}^2S_{22} + 3C_{3111}S_{11}^2S_{33} + C_{1122}S_{11}S_{22}^2 + C_{1133}S_{11}S_{33}^2 + \\
&+ 2C_{2113}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{1222}S_{22}^3 + C_{1223}S_{22}^2S_{33} + C_{1233}S_{22}S_{33}^2 + C_{1333}S_{33}^3, \\
\varepsilon_{22} &= A_{1122}S_{11} + A_{2222}S_{22} + A_{2233}S_{33} + \\
&+ B_{2211}S_{11}^2 + B_{2222}S_{22}^2 + B_{2233}S_{33}^2 + 2B_{1122}S_{11}S_{22} + B_{1123}S_{11}S_{33} + 2B_{3322}S_{22}S_{33} + \\
(13) \quad &+ C_{2111}S_{11}^3 + C_{1122}S_{11}^2S_{22} + C_{2113}S_{11}^2S_{33} + 3C_{1222}S_{11}S_{22}^2 + C_{1233}S_{11}S_{33}^2 + \\
&+ 2C_{1223}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{2222}S_{22}^3 + 3C_{3222}S_{22}^2S_{33} + C_{2233}S_{22}S_{33}^2 + C_{2333}S_{33}^3, \\
\varepsilon_{33} &= A_{1133}S_{11} + A_{2233}S_{22} + A_{3333}S_{33} + \\
&+ B_{3311}S_{11}^2 + B_{3322}S_{22}^2 + B_{3333}S_{33}^2 + B_{1123}S_{11}S_{22} + 2B_{1133}S_{11}S_{33} + 2B_{2233}S_{22}S_{33} + \\
&+ C_{3111}S_{11}^3 + C_{2113}S_{11}^2S_{22} + C_{1133}S_{11}^2S_{33} + C_{1223}S_{11}S_{22}^2 + 3C_{1333}S_{11}S_{33}^2 + \\
&+ 2C_{1233}S_{11}S_{22}S_{33} + C_{3222}S_{22}^3 + C_{2233}S_{22}^2S_{33} + 3C_{2333}S_{22}S_{33}^2 + C_{3333}S_{33}^3. \\
\varepsilon_{12} &= 2 \left( D_0^1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^1 |S_{12}| + 4D_2^1 S_{12}^2 \right) S_{12}, \quad \varepsilon_{23} = 2 \left( D_0^2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^2 |S_{23}| + 4D_2^2 S_{23}^2 \right) S_{23}, \\
\varepsilon_{31} &= 2 \left( D_0^3 + \frac{3\sqrt{2}}{2} D_1^3 |S_{31}| + 4D_2^3 S_{31}^2 \right) S_{31}.
\end{aligned}$$

По результатам механических экспериментов с макрообразцами удобнее определять параметры  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$ ,  $C_{ijkl}$ , входящие в соотношения (11), (13). Однако для идентификации коэффициентов моделей (10), (12) требуется найти значения  $c_0^{\alpha\beta}$ ,  $c_1^{\alpha\beta}$ ,  $c_2^{\alpha\beta}$ . Получена линейная связь между коэффициентами  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$ ,  $C_{ijkl}$  и коэффициентами модели  $c_0^{\alpha\beta}$ ,  $c_1^{\alpha\beta}$ ,  $c_2^{\alpha\beta}$ .

В квадратичной части определяющих соотношений 10 коэффициентов  $B_{ijkl}$  линейно выражаются через 6 параметров  $c_1^{\alpha\beta}$ , поэтому линейно независимыми являются 6 констант  $B_{ijkl}$ . В качестве независимых параметров выберем следующие:  $B_{1111}$ ,  $B_{1122}$ ,  $B_{2211}$ ,  $B_{2222}$ ,  $B_{3311}$ ,  $B_{3333}$ . Остальные 4 из 10 параметров  $B_{1123}$ ,  $B_{1133}$ ,  $B_{2233}$ ,  $B_{3322}$  линейно выражаются через них.

В определяющих соотношениях (13) 15 коэффициентов  $C_{ijkl}$  линейно выражаются через 6 параметров  $c_2^{\alpha\beta}$ , поэтому линейно независимыми являются также 6 констант  $C_{ijkl}$ . В качестве независимых параметров выберем

следующие:  $C_{1111}$ ,  $C_{1222}$ ,  $C_{2111}$ ,  $C_{2222}$ ,  $C_{3111}$ ,  $C_{3333}$ . Остальные 9 из 15 параметров  $C_{ijkl}$  линейно выражаются через них.

Параметры модели  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$ ,  $C_{ijkl}$  могут быть определены из экспериментов с плоскими образцами. Для определения параметров  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$ ,  $C_{ijkl}$  образцы в форме пластин для экспериментов должны быть вырезаны во взаимно перпендикулярных направлениях, образованных главными осями анизотропии ортотропного материала. В экспериментах на растяжение и сжатие требуется измерять зависимости продольных и поперечных деформаций плоских образцов от приложенного напряжения.

Независимые материальные константы  $A_{1111}$ ,  $A_{1122}$ ,  $A_{2222}$ ,  $B_{1111}$ ,  $B_{1122}$ ,  $B_{2211}$ ,  $B_{2222}$ ,  $B_{3311}$ ,  $B_{3333}$ ,  $C_{1111}$ ,  $C_{1222}$ ,  $C_{2111}$ ,  $C_{2222}$ ,  $C_{3111}$ ,  $C_{3333}$  моделей второго и третьего порядков можно определить из одних и тех же экспериментов:

1) из экспериментов в плоскости  $Ox_1x_2$  на растяжение и сжатие по оси  $Ox_1$  определяются параметры  $A_{1111}$ ,  $A_{1122}$ ,  $B_{1111}$ ,  $B_{2211}$ ,  $C_{1111}$ ,  $C_{2111}$ . Для этого должны быть получены зависимости  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(S_{11})$ ,  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}(S_{11})$ ;

2) из экспериментов в плоскости  $Ox_1x_2$  на растяжение и сжатие по оси  $Ox_2$  определяются параметры  $A_{2222}$ ,  $B_{2222}$ ,  $B_{1122}$ ,  $C_{2222}$ ,  $C_{1222}$ . Для этого требуются экспериментальные зависимости  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(S_{22})$ ,  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}(S_{22})$ ;

3) из экспериментов в плоскости  $Ox_1x_3$  на растяжение и сжатие по оси  $Ox_3$  по зависимостям  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}(S_{33})$ ,  $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}(S_{33})$  определяются параметры  $A_{1133}$ ,  $A_{3333}$ ,  $B_{3333}$ ,  $C_{3333}$ ;

4) из экспериментов в той же плоскости на растяжение и сжатие по оси  $Ox_1$  по зависимости  $\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}(S_{11})$  можно определить  $B_{3311}$ ,  $C_{3111}$ ;

5) из экспериментов в плоскости  $Ox_2x_3$  на растяжение и сжатие по оси  $Ox_3$  по зависимости  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}(S_{33})$  определяется параметр  $A_{2233}$ ;

6) коэффициенты модели  $D_i^j$  определяются по результатам трёх экспериментов на сдвиг в плоскостях  $Ox_1x_2$  ( $D_0^1$ ,  $D_1^1$ ,  $D_2^1$ ),  $Ox_1x_3$  ( $D_0^2$ ,  $D_1^2$ ,  $D_2^2$ ),  $Ox_2x_3$  ( $D_0^3$ ,  $D_1^3$ ,  $D_2^3$ ), образованных главными направлениями анизотропии ортотропного материала. При этом эксперименты на сдвиг могут быть выполнены как опыты на двухосное растяжение-сжатие под углом  $45^\circ$  к главным осям анизотропии.

Если константы  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$ ,  $C_{ijkl}$  найдены по результатам экспериментов, то параметры нелинейных моделей (10), (12)  $c_0^{\alpha\beta}$ ,  $c_1^{\alpha\beta}$ ,  $c_2^{\alpha\beta}$  также можно вычислить.

В третьей главе для идентификации материальных параметров построенных моделей ортотропного материала на основе предложенных программ экспериментов выполнена постановка задачи об определении

напряжённно-деформированного состояния в пластине из ортотропного материала при действии растягивающих, сжимающих и сдвиговых нагрузок.

Рассмотрена ортотропная пластина, у которой одна ось анизотропии  $\vec{a}_3$  перпендикулярна плоскости, а две другие  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  лежат в плоскости пластины (рисунок 1). Ориентация главных осей анизотропии определяется углом  $\varphi$  между базисными векторами  $\vec{a}_1$  и  $\vec{e}_1$ .

Пластина в общем случае нагружена нормальными и касательными усилиями, распределёнными по её краям (рисунок 2).

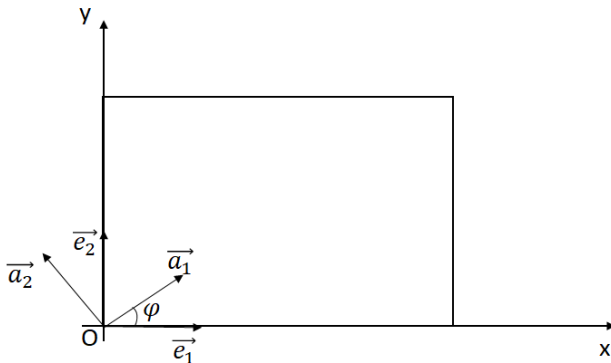


Рисунок 1 – Главные оси анизотропии

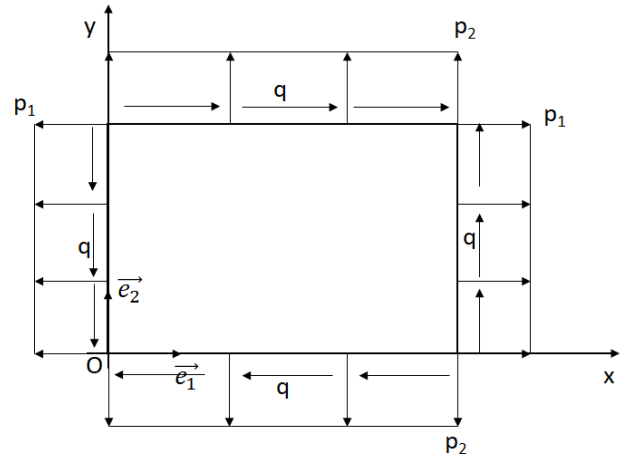


Рисунок 2 – Схема нагружения пластины

При такой схеме нагружения в пластине реализуется плоское напряжённное состояние, при котором компоненты тензора напряжений  $S_{xz} = S_{yz} = S_{zz} = 0$ . Граничные условия, соответствующие схеме нагружения (рисунок 2):

$$\begin{aligned} S_{xx}|_{x=0} = S_{xx}|_{x=a} = p_1, \quad S_{xy}|_{x=0} = S_{xy}|_{x=a} = q, \\ S_{xy}|_{y=0} = S_{xy}|_{y=b} = q, \quad S_{yy}|_{y=0} = S_{yy}|_{y=b} = p_2. \end{aligned} \quad (14)$$

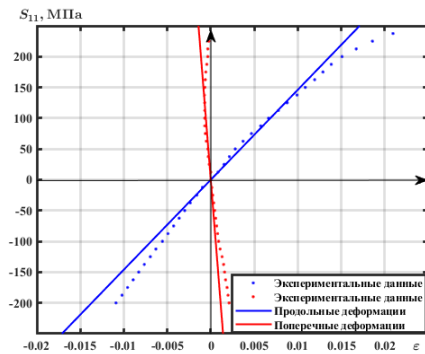
Тензор напряжений  $\mathbf{S} = p_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1 + p_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2 + q(\vec{e}_1 \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \vec{e}_1)$ , который удовлетворяет уравнениям равновесия и граничным условиям (14), определяет однородное напряжённное состояние в пластине.

Найдены решения поставленной задачи об определении напряжённно-деформированного состояния пластины, полученные с использованием определяющих соотношений первого, второго и третьего порядка соответственно. При заданной схеме нагружения пластины определены компоненты тензора деформаций пластины как функции внешних воздействий  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q$  и угла ориентации главных осей анизотропии  $\varphi$ . Эти решения положены в основу идентификации параметров построенных моделей по данным экспериментов. По известным из литературы экспериментальным данным о напряжениях  $S_{mn}^{(i)}$  и деформациях  $\varepsilon_{mn}^{(i)}$  упругие константы определены методом наименьших квадратов.

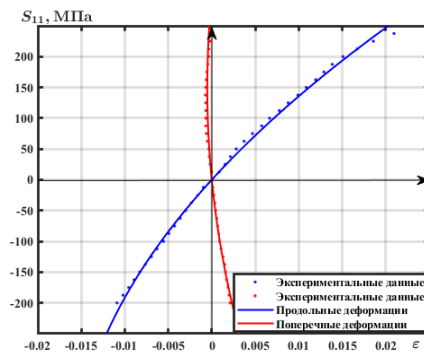
В некоторых работах приведены результаты экспериментов по растяжению и сжатию образцов в направлении  $\vec{a}_1$ , в направлении  $\vec{a}_3$ , под углами  $22,5^\circ$ ,  $45^\circ$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  и под углами  $22,5^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $67,5^\circ$  в плоскости векторов  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_3$ . При этом измерены только продольные деформации. В диссертации разработан способ определения констант  $A_{1122}$ ,  $B_{1122}$ ,  $B_{2211}$ ,  $C_{1222}$ ,  $C_{3111}$ ,  $C_{1333}$  по данным указанных экспериментов.

Константы моделей первого, второго и третьего порядков  $A_{ijkl}$ ,  $B_{ijkl}$ ,  $C_{ijkl}$ , а также  $c_0^{\alpha\beta}$ ,  $c_1^{\alpha\beta}$ ,  $c_2^{\alpha\beta}$  определены для тканого композита на основе стекловолокна и для композита AVCO Mod 3a.

На рисунках 3–5 представлены графики зависимостей напряжений от деформаций, построенные по определяющим соотношениям (9), (11), (13) со значениями параметров, найденных для тканого композита на основе стекловолокна.



а) линейные определяющие соотношения



б) определяющие соотношения второго порядка

Рисунок 3 – Зависимости напряжений от деформаций при растяжении и сжатии композита на основе стекловолокна в направлении главного вектора  $\vec{a}_1$

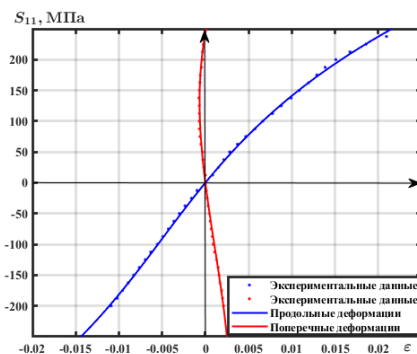


Рисунок 4 – Зависимости напряжений от деформаций при растяжении и сжатии композита на основе стекловолокна в направлении главного вектора  $\vec{a}_1$ , построенные для определяющих соотношений третьего порядка

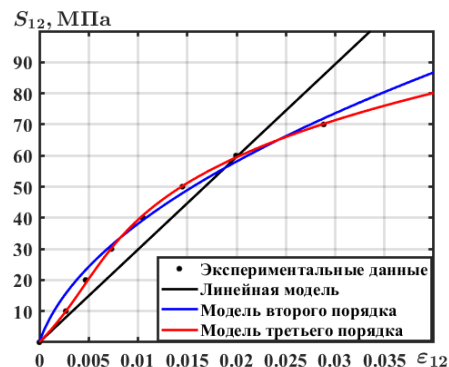
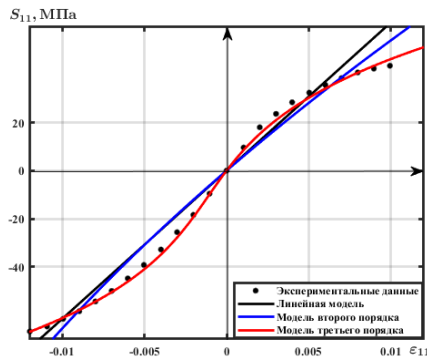
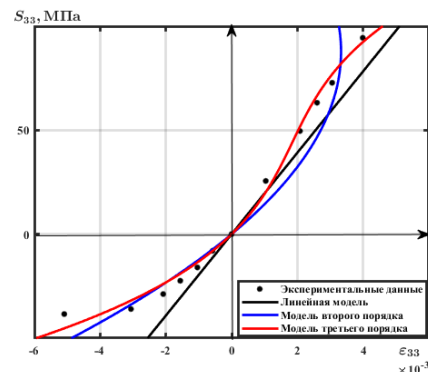


Рисунок 5 – Зависимости напряжений от деформаций при сдвиге композита на основе стекловолокна в плоскости главных векторов  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$

На рисунках 6, 7 представлены графики зависимостей напряжений от деформаций, построенные по определяющим соотношениям (9), (11), (13) со значениями параметров, найденных для композита AVCO Mod 3a.

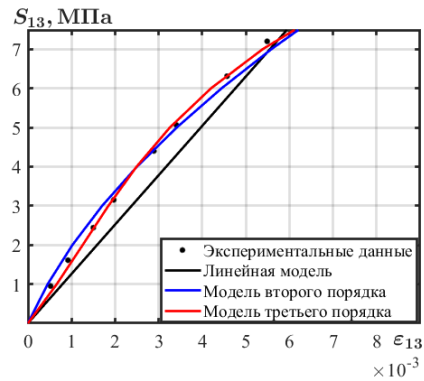
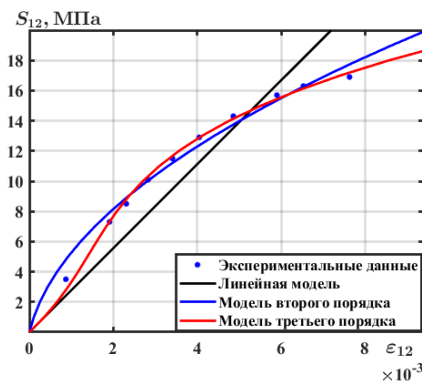


а) растяжение и сжатие в направлении  
главного вектора  $\vec{a}_1$



б) растяжение и сжатие в направлении  
главного вектора  $\vec{a}_3$

Рисунок 6 – Зависимости напряжений от деформаций для композита AVCO Mod 3a

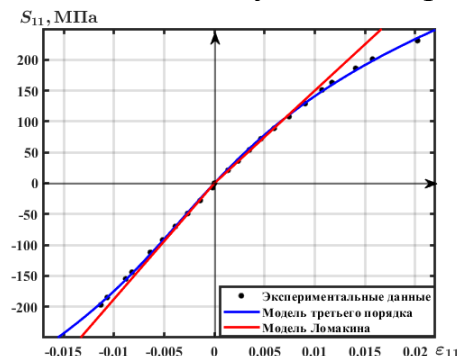


а) сдвиг в плоскости главных векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$  б) сдвиг в плоскости главных векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_3$

Рисунок 7 – Зависимости напряжений от деформаций для композита AVCO Mod 3a

Графики на рисунках 3–7 показывают, что предложенные нелинейные определяющие соотношения, учитывающие зависимости деформаций от напряжений второго и третьего порядков, позволяют описать результаты экспериментов с анизотропным материалом более адекватно, чем линейные соотношения обобщённого закона Гука. Предложенные нелинейные определяющие соотношения позволяют описывать разнсопротивляемость анизотропного материала растяжению и сжатию, наблюдаемую в эксперименте.

На рисунках 8–10 представлены графики зависимостей напряжений от деформаций, построенные по определяющим соотношениям (13) со значениями параметров для тканого композита на основе стекловолкна и по определяющим соотношениям, предложенным в статье Е.В.



Ломакина и Б.Н. Федулова, с параметрами для того же материала.

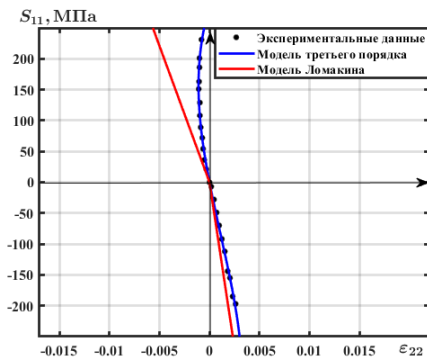


Рисунок 9 – Зависимости напряжений от поперечных деформаций при растяжении и сжатии композита на основе стекловолокна в направлении главного вектора  $\vec{a}_1$

Рисунок 8 – Зависимости напряжений от продольных деформаций при растяжении и сжатии композита на основе стекловолокна в направлении главного вектора  $\vec{a}_1$

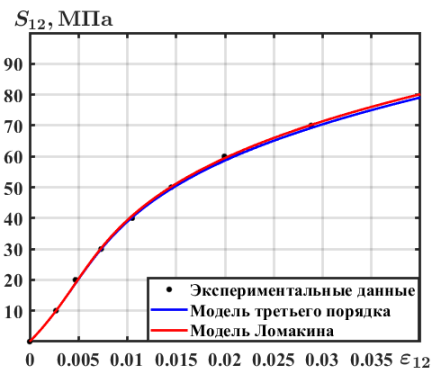


Рисунок 10 – Зависимости напряжений от деформаций при сдвиге композита на основе стекловолокна в плоскости главных векторов  $\vec{a}_1, \vec{a}_2$

В заключение отметим, что в диссертации решена научная задача построения соотношений, устанавливающих нелинейные законы упругого деформирования ортотропных материалов, и экспериментального определения входящих в них материальных параметров.

### Основные результаты работы:

1. Построены конкретные формы нелинейных определяющих соотношений для упругого ортотропного материала, удовлетворяющие предельной форме обобщения частного постулата А.А. Ильюшина на анизотропные материалы.

2. Показано, что для ортотропного материала в рамках использованной гипотезы число констант в определяющих соотношениях второго порядка равно 18, в определяющих соотношениях третьего порядка – 27.

3. Сформулирована программа экспериментов, достаточных для идентификации параметров предложенных соотношений, которая включает восемь опытов с плоскими образцами. В экспериментах должны быть измерены продольные и поперечные деформации.

Предложен способ определения значений констант по экспериментам, в которых измерены только продольные деформации при растяжении и сжатии под разными углами к направлениям главных осей анизотропии.

4. По известным из литературы экспериментальным данным для композитного материала на основе стекловолокна и композитного материала AVCO Mod 3a определены значения констант моделей первого, второго и третьего порядков.

5. Показано, что предложенные модели описывают наблюдаемое в экспериментах явление разнсопротивляемости и нелинейное поведение композитных материалов при чистом сдвиге. При этом модель третьего порядка описывает экспериментальные данные лучше, чем модели второго и

первого порядков. В отличие от известных нелинейных моделей предложенные модели описывают не только нелинейное поведение материала при чистом сдвиге, но и нелинейную зависимость между напряжениями, продольными и поперечными деформациями.

Содержание диссертации отражено в 6 публикациях автора.

Статьи в журналах, входящих в перечень ВАК:

1. **Нгуен Ш.Т.** Идентификация параметров квадратичной модели упругого анизотропного материала / **Ш.Т. Нгуен**, Д.В. Христич // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2021. – № 3 (49). – С. 3–11. DOI: 10.37972/chgpu.2021.49.3.001.

2. **Нгуен Ш.Т.** Нелинейные модели упругости ортотропного материала / **Ш.Т. Нгуен** // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2021. – № 4 (50). – С. 25–32. DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.004.

Статьи в изданиях, индексируемых в Web of Science и Scopus:

3. Khristich D. Determining the type of initial anisotropy of elastic material from a series of experiments / D. Khristich, **S.T. Nguyen**, D. Sukhorukov // IOP Conference Series: Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1479. – 012139. – 12 p. DOI: 10.1088/1742-6596/1479/1/012139

Другие публикации:

4. Христич Д.В. Определение типа начальной анизотропии упругого материала из серии экспериментов / Д.В. Христич, **Ш.Т. Нгуен**, Д.А. Сухоруков // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сборник трудов Международной научной конференции, Воронеж, 11–13 ноября 2019 г. – Воронеж: Издательство «Научно-исследовательские публикации», 2020. – 1950 с. – С. 1561–1566.

5. **Нгуен Ш.Т.** Определение констант материала из серии экспериментов на одноосное растяжение-сжатие / **Ш.Т. Нгуен** // Актуальные научные исследования в современном мире. – 2021. – № 11-10 (79). – С. 62–67.

6. **Нгуен Ш.Т.** Определение констант материала ортотропной пластины / **Ш.Т. Нгуен** // Вестник Тульского государственного университета. Серия: Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. – 2021. – № 1. – С. 59–72.

Подписано в печать 26.04.2022.

Формат бумаги 70×100 1/16. Бумага офсетная.

Цифровая печать. Усл. печ. л. . Тираж 100 экз. Заказ

Отпечатано в Издательстве ТулГУ.

300012, г. Тула, просп. Ленина, 95